Solución algebraica

Ahora, esbocemos la **solución algebraica de Scipione del Ferro y Niccolò Tartaglia**. Como calentamiento, recordemos el simple caso cuadrático,

$$x^2+bx+c=0.$$

Con la sustitución $y=x+b/2$ se simplifica a $y^2=b^2/4-c$, y se ven las soluciones familiares $x_{1,2}=\frac{1}{2}(-b\pm\sqrt{b^2-4c})$. Obviamente, se cumple que $x_1+x_2=-b$ y $x_1x_2=c$, que es conocida como (el caso más simple de) la Fórmula de Vieta.

Para el polinomio cúbico se puede – de la misma manera – quitar el término cuadrático, lo que conduce a la forma que del Ferro y Tartaglia consideraron:

$$x^3+px+q=0. \qquad (2)$$

Hoy en día, parece extraño que no notaran que esto es equivalente al caso más general, otra consecuencia de descartar números negativos.

En este punto, la continuación es engañosa, ¡ por favor, pruébala!

La idea crucial es escribir *x* como suma de dos variables nuevas, $x=u+v$, que implica

$$x^3=u^3+v^3+3uvx.$$

Comparando la ec. (2), se identifican $p=-3uv$, $q=-u^3-v^3$. De la Fórmula de Vieta, se observa que u^3 y v^3 son las soluciones de la ecuación cuadrática

$$z^2+qz-(p/3)^3=0.$$

Ahora se ha logrado una reducción al caso $n=2$, lo que conduce a las soluciones

$$u=(-\frac{q}{2}+\sqrt{D})^{1/3}, \quad v=(-\frac{q}{2}-\sqrt{D})^{1/3}, \quad con \quad D=(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3. \qquad (3)$$

Finalmente se pueden formar las soluciones para *x* sumando u y v. (Llamar u al término de la izquierda en la ecuación (3) y v al de la derecha no hace diferentes las soluciones para x que si se hubiera tomado el orden inverso). A primera vista, esto parece dar 9 posibilidades, pero la constricción $uv=-p/3$ permite solo tres de ellas. Por ejemplo, si p es real, entonces u y v podrían ambas ser reales, o deben tener partes imaginarias con el mismo signo si $p>0$, o signos opuestos si $p<0$.

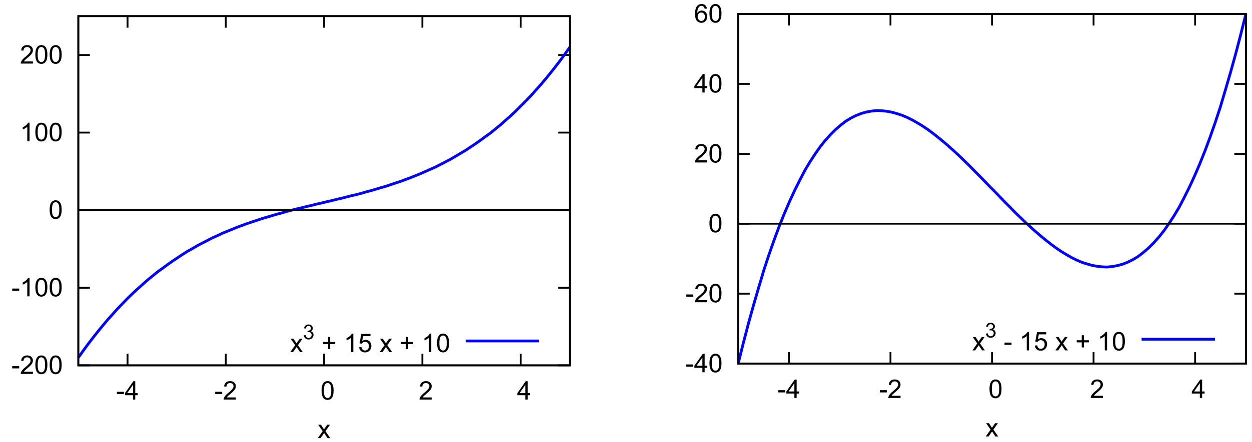

Figura 7: Ejemplos de gráficas de ecuaciones cúbicas: A la izquierda, D=150, por lo que solo hay una raíz real; a la derecha, D=−100, y hay tres soluciones reales.

Insertando las combinaciones permitidas de u y v resulta la *"Fórmula de Cardano"* para las tres soluciones en x. Para un discriminante $D > 0$ se obtiene una raíz real y dos raíces complejas conjugadas. Esto incluye el caso considerado por Khayyám. De otra forma, para $D \leq 0$, hay tres raíces reales (con doble o triple degeneración, si $D = 0$); por lo tanto, es necesario mantener a los números imaginarios en un paso intermedio, aún si solo estamos interesados en soluciones reales a la ecuación cúbica.

Un método alternativo fue introducido en el siglo XVIII por Joseph Lagrange en su artículo *"Réflexions sur la résolution algébraique des équations"*, empleando números complejos de forma profesional.

Lecturas adicionales

Sobre historia de las matemáticas en general, recomendamos:

• D. J. Struik, A concise history of mathematics, Dover Publications (4a edición), New York (1987).

En español, Historia concisa de las matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, 1986.

Para un recuento histórico, que también describe la solución a las ecuaciones de tercer y cuarto grado, ver

• J. Stillwell, Mathematics and Its History, Springer, New York (2004).

Revisión histórica de la disputa sobre la ecación cúbica:

• W. Dunham, Journey through Genius, John Wiley and Sons (1990) (Capítulo 6).

Sobre las biografías de Tartaglia y Cardano:

• Giovanni Battista, Nicolò Tartaglia: Invenzioni, disfide e sfortune, Università degli Studi di Siena, Siena 1986.

• Oystein Ore, Cardano, the Gambling Scholar, Princeton University Press (1953).